

ESG

Management School

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE PRIVE RECONNU PAR L'ETAT
DIPLOME VISÉ PAR LE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE/
GRADE MASTER
MEMBRE DE LA CONFERENCE DES GRANDES ECOLES

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DE L'ESG

Session de Septembre 2010

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure ½

Coefficient : 2

4 exercices sont à traiter au choix sur les 6 proposés.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : Etude de fonction

On s'intéresse à la fonction $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
2. Dériver cette fonction.
3. Donner le tableau de variations de cette fonction.
4. Donner les asymptotes de cette fonction.

Exercice 2 : Probabilités

Une entreprise a ses sites de productions répartis sur trois pays : A, B et C. Cette entreprise a 4 sites de production dans le pays A, 6 dans le pays B et 9 dans le pays C. On cherche à sélectionner trois sites pour y installer des centres de recherche.

1. De combien de façon peut-on choisir ces trois sites ?
2. Quelle est la probabilité que chaque pays dispose d'un centre de recherche ?
3. Quelle est la probabilité qu'un seul pays dispose de tous les centres de recherche ?
4. Quelle est la probabilité que seulement deux pays disposent de centres de recherche ?

Exercice 3 : Suites

Pour l'année en cours, le prix d'un objet est P_0 . L'inflation des prix est estimée à 3% (les prix dans un an subiront une hausse de 3 %). On note P_n le prix de ce même objet l'année n .

1. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n . De quel type de suite s'agit-il ? En déduire une expression de P_n en fonction de n et de P_0 .

2. Au bout de combien d'années le prix de l'objet aura-t-il doublé (on donnera une valeur exacte) ?

On suppose maintenant qu'à une année d'inflation à 3% succède une année de désinflation de 1% (les prix baissent de 1%) et vice-versa. Les taux d'inflation forment donc une suite alternée (3, -1, 3, -1, ...). On suppose que la première année est une année d'inflation.

3. Exprimer P_2 en fonction de P_0 .
4. Exprimer P_{n+2} en fonction de P_n .

Exercice 4 : Intégrale

On pose $f(x) = e^x \ln(x)$

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Dériver la fonction f .

3. En déduire une valeur approchée de $\int_1^5 e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)$ sachant que $\ln(5) \approx 1,609$ et $e^5 \approx 148,413$.

Exercice 5 : Polynôme

On s'intéresse au polynôme du second degré qui passe par A(1,1) et a pour sommet B(2,2).

1. Donner une allure graphique de ce polynôme.
2. Donner l'équation de ce polynôme.
3. Dériver ce polynôme.

Exercice 6 : Statistiques

On s'intéresse aux résultats des ventes sur six mois d'une entreprise :

Ventes	2,3	3,4	2,7	3,8	4	5,1
Mois	1	2	3	4	5	6

1. Représenter graphiquement cette série.
2. Donner l'équation de la droite passant par le premier et le dernier point de cette série.
3. Donner l'équation de la droite passant par le point moyen de cette série et parallèle à la droite précédente.
4. Utiliser cette dernière droite pour faire une prévision de ventes pour le mois 7.

CORRIGE DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

1/ Etude de fonction

Corrigé de la question 1

On s'intéresse à la fonction $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.

Cette fonction est définie pour $1+x \neq 0$ soit $x \neq -1$ ainsi l'ensemble de définition est $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$

Corrigé de la question 2

$$\text{On a } f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Corrigé de la question 3

La dérivée est négative. La fonction est donc décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$.

4. Donner les asymptotes de cette fonction.

La fonction admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

2/ Probabilités

Corrigé de la question 1

Il y a en tout 19 sites de productions sur l'ensemble des trois pays. On doit choisir de sélectionner trois sites parmi ces 19. Il s'agit d'un cas de « tirage simultané ». Le nombre de choix possible est donc

$$\binom{19}{3} = \frac{19!}{3!(19-3)!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2} = \boxed{969}$$

Corrigé de la question 2

Pour que chaque pays dispose d'un centre de recherche, le choix se fait séparément d'un site dans chaque pays. Dans le pays A il y a 4 choix possibles, dans le pays B, 6 choix possibles et dans le pays C, 9 choix possibles. Au total il y a $4 \times 6 \times 9 = 216$ façons de choisir les trois centres. Comme il s'agit d'un cas d'équiprobabilité la formule $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ indique une probabilité $P_1 = \frac{216}{969} \approx \boxed{22,29\%}$.

Corrigé de la question 3

Pour qu'un seul pays dispose de tous les centres de recherches, on dispose soit tous les centres dans le pays A, soit tous les centres dans le pays B, soit tous les centres dans le pays C. Dans le pays A il y a $\binom{4}{3} = 4$ façons de choisir les trois centres. Dans le pays B $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$ et dans le pays C $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$. Il y a donc en tout $4 + 20 + 84 = 108$ façons de choisir les trois centres. La probabilité de trouver tous les centres dans le même pays est donc $P_2 = \frac{108}{969} \approx \boxed{11,15\%}$

Corrigé de la question 4

Cette probabilité est difficile à déterminer directement, cependant on peut constater que soit tous les centres sont dans un seul pays, soit tous les centres sont dans deux pays différents, soit les centres sont dans trois pays différents. Il n'y a pas d'autres alternatives. Ainsi si on note P_3 la probabilité que les centres soient dans deux pays différents, on a $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ ainsi $P_3 = 1 - \frac{216}{969} - \frac{108}{969} = \frac{215}{323} \approx \boxed{66,56\%}$

3/ Suites

Corrigé de la question 1

1. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n . De quel type de suite s'agit-il? En déduire une expression de P_n en fonction de n et de P_0 .

Corrigé de la question 2

Le prix aura doublé quand $P_n = 2P_0$ soit $2 = 1.03^n$ d'où $n = \frac{\ln(2)}{\ln(1.03)}$
 On suppose maintenant qu'à une année d'inflation à 3% succède une année de désinflation de 1% (les prix baissent de 1%) et vice-versa. Les taux d'inflation forment donc une suite alternée (3, -1, 3, -1, ...). On suppose que la première année est une année d'inflation.

Corrigé de la question 3

On a $P_2 = 1.03 \times 0.99 \times P_0$

Corrigé de la question 4

$P_{n+2} = 1.03 \times 0.99 \times P_n$

4/ Intégrale

Corrigé de la question 1

L'ensemble de définition est $]0; +\infty[$

Corrigé de la question 2

L'ensemble de définition est $]0; +\infty[$

Corrigé de la question 3

On retrouve la dérivée de la fonction f . Ainsi l'intégrale vaut $f(5) - f(1) = e^5 \times \ln(5) = 238.86$.

5/ Polynôme

Corrigé de la question 1

C'est une parabole

Corrigé de la question 2

Son équation est $y = ax^2 + bx + c$

On a $1 = a + b + c$

et $2 = 4a + 2b + c$

puis $0 = 2a + b$

ainsi on trouve $a = 1$, $b = -2$ et $c = 2$.

Corrigé de la question 3

$$y' = 2x - 2$$

6/ Statistique

Corrigé de la question 2

L'équation de cette droite est $y = 0.56x + 1.74$

Corrigé de la question 3

Le point moyen est $(3.5; 3.55)$

La droite est donc $y = 0.56x + 1.59$

Corrigé de la question 4

On trouve $y = 5.51$.