ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

ETABLISSEMENT RECONNU PAR L'ETAT
DIPLÔME VISÉ PAR LE MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE / GRADE MASTER

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DE L'ESG

MATHEMATIQUES

Durée : 1 heure ½ ***Coefficient : 2***

Exercice 1

EXERCICE 1 (7 points) On prend un jeu de 52 cartes. Il y a quatre couleurs (coeur, trèfle, pique, carreau). Il y a treize cartes par couleur (as, deux, ...valet, dame, roi). On considère une main comme étant formée de treize cartes.

1. Combien peut t-on composer de mains en tout ?
2. Combien y a t-il de mains qui contiennent les quatre as ?
3. Combien y a t-il de mains qui contiennent 4 coeurs dont le roi de coeur ?
4. Combien y a t-il de mains qui ne contiennent aucun coeur ?
5. Combien y a t-il de mains qui contiennent 3 coeurs au plus ?

Exercice 2

EXERCICE 2 (8 points) Soit f l'application définie par $f(x) = \frac{1}{x(x^n+1)}$ avec n un entier strictement positif.

1. Déterminer a, b et c tel que $f(x) = \frac{ax^{n-1}+b}{x^n+1} + \frac{c}{x}$
2. Montrer que $\int_1^2 f(x)dx = ln(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}})$
3. Calculer $\int_1^2 \frac{x^{n-1}lnx}{(x^n+1)^2}dx$ à l'aide d'une intégration par partie.

Exercice 3

EXERCICE 3 (5 points)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-1}^{x}(4t-1)dt$.

1. Calculer $F(1)$ et $F(2)$.
2. Quelle est la dérivée de $F(x)$?
3. Pour quelles valeurs de x, F s'annule t-elle ?

Exercice 1 :

1. Une main est composée de 13 cartes parmi 52 : il y a donc C_{52}^{13} mains en tout.
2. Pour former une main contenant les 4 as, il reste à choisir $13-4=9$ cartes parmi les $52-4=48$ cartes restantes. En conclusion, il y a donc en tout C_{48}^{9} mains contenant les quatre as.
3. Pour former une main contenant (exactement) 4 cœurs dont le roi de cœur, on prend d'abord le roi de cœur, puis on choisit 3 cœurs parmi les $13-1=12$ cœurs restants, puis on choisit $13-4=9$ cartes parmi les $52-13=39$ cartes des autres couleurs. Au total, on a donc $\mathrm{C}_{12}^{3} \times \mathrm{C}_{39}^{9}$ possibilités.
4. Pour former les mains ne contenant aucun cœur, il faut choisir 13 cartes parmi les $52-13=39$ cartes des autres couleurs, ce qui offre C_{39}^{13} possibilités.
5. Les mains qui contiennent 3 cœurs au plus sont celles qui contiennent aucun cœur, ou bien qu'un seul, ou bien exactement 2, ou bien exactement 3. On a donc $\mathrm{C}_{13}^{0} \times \mathrm{C}_{52-13}^{13-0} + \mathrm{C}_{13}^{1} \times \mathrm{C}_{52-13}^{13-1} + \mathrm{C}_{13}^{2} \times \mathrm{C}_{52-13}^{13-2} + \mathrm{C}_{13}^{3} \times \mathrm{C}_{52-13}^{13-3}$ possibilités, soit $\mathrm{C}_{39}^{13} + 13 \times \mathrm{C}_{39}^{12} + 78 \times \mathrm{C}_{39}^{11} + 286 \times \mathrm{C}_{39}^{10}$.

Exercice 2 :

1. $$\frac{ax^{n-1}+b}{x^n+1} + \frac{c}{x} = \frac{ax^n+bx+c(x^n+1)}{x(x^n+1)} = \frac{(a+c)x^n+bx+c}{x(x^n+1)} = \frac{1}{x(x^n+1)},$$
   donc, par identification polynômiale, on doit avoir
   $$\begin{cases} a+c=0 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$$
   donc $a=-1$, $b=0$ et $c=1$. On a ainsi $f(x) = \dfrac{-x^{n-1}}{x^n+1} + \dfrac{1}{x}$.
2. On en déduit que
   $$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx &= \left[-\frac{1}{n}\ln(x^n+1)+\ln(x)\right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{n}\ln(2^n+1)+\ln(2)+\frac{1}{n}\ln(2)-\ln(1) \\ &= -\frac{1}{n}\ln(2^n+1)+\frac{1}{n}(n+1)\ln 2 - 0 \\ &= -\frac{1}{n}\ln(2^n+1)+\frac{1}{n}\ln 2^{n+1} \\ &= \frac{1}{n}\ln\frac{2^{n+1}}{2^n+1} \\ &= \ln\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}} \end{aligned}$$

3. Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^{n-1}\ln x}{(x^n+1)^2}$ par une I.P.P. avec :

$$\begin{aligned} u &= \ln x; & v' &= \frac{x^{n-1}}{(x^n+1)^2}; \\ u' &= \frac{1}{x}; & v &= \frac{1/n}{x^n+1}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^{n-1}\ln x}{(x^n+1)^2}dx &= \left[\frac{\frac{1}{n}\ln x}{x^n+1}\right]_1^2 - \frac{1}{n}\int_1^2 f(x)dx \\ &= \frac{\frac{1}{n}\ln 2}{2^n+1} - \frac{1}{n}\ln\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. $F(x) = \int_{-1}^{x}(4t-1)\mathrm{dt} = [2t^2-t]_{-1}^{x} = 2x^2-x-3$, donc $F(1) = -2$ et $F(2) = 3$.
2. $F'(x) = 4x - 1$.
3. $F(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x-3) = 0$ donc F s'annule lorsque $x = -1$ ou $x = \frac{3}{2}$.